ECOLE SUPERIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUEES

ESLSCA

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

ISC

Concours d'admission de 1993

MATHÉMATIQUES III

Options Economique (ESLSCA-ISC) et Technologique (ISC)

Le Jeudi 27 Mai 1993, de 8 h. à 12 h.

Sont autorisées:

- –. Règles graduées.
- –. Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE 1 (5 points)

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des prélèvements successifs, au hasard, d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : Après *chaque* tirage, la boule obtenue est remise dans l'urne, et on ajoute *de plus* n boules de la couleur de la boule qui vient d'être obtenue, *avant* le tirage suivant. (n est un entier naturel qui sera précisé dans les questions suivantes).

1°) Dans cette question n vaut 0. Soit k un entier strictement positif, quelle est la loi du nombre de boules blanches obtenues au cours des k premiers tirages ? Préciser son espérance et sa variance.

2°) Dans cette question on prend n = 1. Quelle est la loi du nombre aléatoire de boules blanches obtenues au cours des deux premiers tirages ? des trois premiers tirages ? Peut-on généraliser les résultats obtenus ?

3°) Dans cette question n est choisi au début des tirages et au hasard parmi les trois nombres 0, 1 et 2. On effectue alors deux tirages et on obtient les deux fois une boule blanche, quelle est la probabilité d'avoir choisi n = 0 ? n = 1 ? n = 2 ?

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \text{Ln}\left[\frac{e^x - 1}{x}\right]$, Ln désignant la fonction logarithme népérien et e le nombre réel tel que Ln(e) = 1.

1°) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Étudier les variations de f. Préciser la nature des branches infinies de la représentation graphique (C_f) de f dans un repère orthonormé.

3°) On pose g(x) = f(x) - x. Montrer que l'on a : g(x) = f(-x), en déduire la position de (C_f) par rapport à la bissectrice de ce repère.

4°) On considère la suite définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
A l'aide de ce qui précède montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE 3 (5 points)

On pose : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\text{Ln}(t)}$ et : $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t.\text{Ln}(t)}$.

1°) Montrer que les intégrales précédentes ont un sens, lorsque x est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

2°) Déterminer explicitement la fonction g.

3°) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f'.

b) Que vaut $\lim_{x \to 1} f'(x)$?

c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4°) a) Déterminer $\lim_{x \to 1} [f(x) - g(x)]$, et en déduire $\lim_{x \to 1} f(x)$.

b) Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1.

5°) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la nature de la branche infinie de (C) et enfin donner l'allure de (C).

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels : $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1°) Calculer A^2 et vérifier que A^2 est combinaison linéaire de la matrice A et de la matrice unité I.

2°) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

3°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres de A. En déduire que A est semblable à la matrice : $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, et déterminer une matrice inversible P telle que : $P^{-1}AP = D$.

4°) Déterminer toutes les matrices B telles que AB = BA.

5°) Montrer qu'il existe une infinité de matrices M telles que $M^2 = A$.